4月号の宿題の拡張

西垣林太郎(甲陽卒)君が，4月号の≪宿題≫を一般的に解いてくれました．ピーター先生から解説記事をいただきましたので掲載します．

*　　*　　*

皆さん，4月号の宿題はまだ覚えているだろうか？

次の問題だった．

> **問題**　9個×6個と8個×7個に区切られている板チョコが1枚ずつある．一郎君，二郎君は，次のルールのもとに交互に食べていく．
>
> (i)　片方を選んでそれを縦か横の1本の区切りの線で折って二つに分ける（一つは空でもよい）．
>
> (ii)　空ではない一方を食べる．
>
> (iii)　最後のチョコを食べる方の勝ち．
>
> さて，一郎君が先に食べるとすると，一郎君は勝てるだろうか．

6月号に紹介した解法2は，基本的に次の通りだった．

$a\times b$ のチョコレートに $F(a,\ b)=(a-1)\oplus(b-1)$ を対応させて置く．（$\oplus$は2進和，すなわち2進法で表したときの繰り上がりを無視した和．例えば $7\oplus6=111_{(2)}\oplus110_{(2)}=1$）

この記号を用いると，必勝法は簡単に説明できる．

$F(x,\ y)\oplus F(u,\ v)=0$ が後手必勝である必要十分条件である．

相手が片方のチョコを完全に食べれば，こちらはもう一方を全部食べて勝つ．また，相手が $a\times b$ と $c\times d$ の2枚のチョコを残すと必ず $F(a,\ b)\oplus F(c,\ d)\neq0$ であり，こちらは片方のチョコを減らして2進和を再び0に戻す事ができる．（詳細については6月号を参照）

3枚以上のチョコの場合は，この方法だとつまずいてしまう．

しかし，そしてこれは西垣君のアイデアである，

$$G(a,\ b)=F(a,\ b)+1\quad(+1\ \text{は普通の和})$$

に切り換えると，チョコレートの枚数と関係なく，残すチョコ（$a_1\times b_1,\ \cdots,\ a_k\times b_k$）に対して

$$G(a_1,\ b_1)\oplus\cdots\cdots\oplus G(a_k,\ b_k)=0$$

を保っていけば勝つ事が保証される．

実は，この $G(a,\ b)$ はゲーム理論の本（例えば，山崎洋平『組合せゲームの裏表』（シュプリンガー・フェアラーク東京））で紹介されている GRUNDY 数である．出題者の僕も知るべきだったけれど…．

結局，僕には一見すごく難しく思われた3枚以上の場合が，当初用意していた方法と殆ど変わらずに解かれてしまった事は，非常に恥ずかしく感じます．矢張り数学の場合も知識が非常に大切だ．僕もゲーム理論の本を読む事を決心した．

因に，なぜ $F(a,\ b)$ でダメだったものが $G(a,\ b)=F(a,\ b)+1$ で上手くいくのか．その理由は，$F(1,\ 1)=0$ にある．つまり，明らかに先手必勝である1枚の 1×1 のチョコの場合が $F(1,\ 1)=0$ になっている事が問題なのだ．$G(a,\ b)$ の定義で

$$G(a_1,\ b_1)\oplus\cdots\cdots\oplus G(a_k,\ b_k)=0$$

になるのは後手必勝の場合だけである（任意の $k\geqq1$ について）．

西垣君は立体のチョコの場合も解決した．

$a\times b\times\cdots\times w$ のチョコに対する GRUNDY 数は

$$G(a,\ b,\ \cdots,\ w)=(a-1)\oplus(b-1)\oplus\cdots\oplus(w-1)+1$$

と定義する．

これで全てが上手くいく．その理由は次の命題にある．

> **命題**　(i)　$(a,\ b,\ \cdots,\ w)$ と $(a',\ b',\ \cdots,\ w')$ が丁度一箇所で異なると
>
> $$G(a,\ b,\ \cdots,\ w)\neq G(a',\ b',\ \cdots,\ w')$$
>
> である．
>
> (ii)　$0\leqq{}^\forall g<G(a,\ b,\ \cdots,\ w)$ に対して次の様な $(a',\ b',\ \cdots,\ w')$ が存在する：
>
> $G(a',\ b',\ \cdots,\ w')=g$,
>
> $(a,\ b,\ \cdots,\ w)$ と $(a',\ b',\ \cdots,\ w')$ が丁度一箇所で異なる．しかもそこで $(a,\ b,\ \cdots,\ w)$ の方が成分が大きい．

この命題の意味は，次の通りである．

全てのチョコの GRUNDY 数の2進和が0である時，どれからどんな部分を食べても，残りに対する2進和が0でなくなる．

又，全てのチョコの GRUNDY 数の2進和が0ではない（q とする）場合，あるチョコを上手く減らせば2進和を再び0にする事（$G(a,\ b,\ \cdots,\ w)$ で，q の最大の2進桁と同じ桁が1であるチョコから食べれば良い）ができる．

かなり大ざっぱに書いたけれど，6月号の宿題の解法でも参考に，各自が証明してみて下さい．

西垣君，どうもありがとう！

*　　*　　*

なお，編集部の都合で掲載が遅れたことを西垣君にお詫びします．